TD 4 : Calcul dans $\mathbb{R}$ - Corrigé partiel

Exercice 2.4) On cherche à résoudre $\left|x^2-x\right| = x+1$. Tout d'abord,

$$x^2-x \geq 0 \iff x(x-1) \geq 0 \iff x \in]-\infty,0] \cup [1,+\infty[$$

On disjoint les cas par un tableau :

x	$]-\infty,0]$	$]0,1]$	$]1,+\infty[$
x^2-x	$+$	$-$	$+$
équation	$x^2-x = x+1$ $\iff x^2-2x-1=0$ $\iff (x-1)^2-2=0$ $\iff (x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})=0$ $\iff x \in \left\{1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\right\}$	$-x^2+x = x+1$ $\iff x^2 = -1$	$x^2-x = x+1$ $\iff x \in \left\{1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\right\}$ (Même calcul que la première colonne)
solutions	$\mathcal{S}_1 = \left\{1-\sqrt{2}\right\}$	$\mathcal{S}_2 = \varnothing$	$\mathcal{S}_3 = \left\{1+\sqrt{2}\right\}$

Finalement,

$$\boxed{\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 = \left\{1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\right\}}$$

Exercice 2.6) On souhaite résoudre $x^4-2x^2+1=0$. Soit $x \in \mathbb{R}$ (l'équation a un sens pour tout réel x). On pose $X = x^2$, de sorte que

$$\begin{aligned} & x^4-2x^2+1=0 \\ \iff & X^2-2X+1=0 \\ \iff & (X-1)^2=0 \\ \iff & X=1 \\ \iff & x^2=1 \\ \iff & x \in \{-1,1\} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{S} = \{-1,1\}}$.

Exercice 3.2) On cherche à résoudre $2x+1 < \sqrt{x^2+8}$. Pour tout réel x, on a toujours $x^2+8 \geq 0$, donc l'équation a un sens.

- Si $x < -\frac{1}{2}$, alors $2x+1<0$, si bien que $2x+1 < 0 \leq \sqrt{x^2+8}$ et l'équation est vérifiée. Dans ce cas, les solutions sont

$$\mathcal{S}_1 := \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$$

- Si $x > \dfrac{1}{2}$, alors $2x+1 \geq 0$, si bien que

$$\begin{aligned}
& 2x+1 < \sqrt{x^2+8} \\
\iff & (2x+1)^2 < x^2+8 \qquad \text{car } x \mapsto x^2 \text{ et } x \mapsto \sqrt{x} \text{ sont strictement croissantes sur } \mathbb{R}_+ \\
\iff & 4x^2+4x+1 < x^2+8 \\
\iff & 3x^2+4x-7 < 0 \\
\iff & (x-1)(3x+7) < 0 \\
\iff & (x-1)\left(x+\frac{7}{3}\right) < 0 \\
\iff & x \in \left]-\infty, -\frac{7}{3}\right[\cup]1, +\infty[
\end{aligned}$$

  Comme $x > \dfrac{1}{2}$, dans ce cas, les solutions sont

$$\mathcal{S}_2 =]1, +\infty[$$

Finalement, les solutions sont

$$\boxed{\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup]1, +\infty[}$$

Exercice 3.5) On cherche à résoudre $|x+1| \leq |x-2|$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$x+1 \geq 0 \iff x \geq -1 \qquad \text{et} \qquad x-2 \geq 0 \iff x \geq 2$$

On disjoint les cas par un tableau :

x	$]-\infty, -1]$	$]-1, 2]$	$]2, +\infty[$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
équation	$-x-1 \leq -x+2$ $\iff -1 \leq 2$	$x+1 \leq -x+2$ $\iff 2x \leq 3$ $\iff x \leq \frac{3}{2}$	$x+1 \leq x-2$ $\iff 1 \leq -2$
solutions	$\mathcal{S}_1 =]-\infty, -1]$	$\mathcal{S}_2 = \left]-1, \frac{3}{2}\right]$	$\mathcal{S}_3 = \varnothing$

Finalement,

$$\boxed{\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 = \left]-\infty, \frac{3}{2}\right]}$$

Exercice 10 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} & \lfloor nx \rfloor \leq nx \\ \Longrightarrow\ & \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x \\ \Longrightarrow\ & \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor \leq x \end{aligned}$$

Ainsi, $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor$ est un entier inférieur à x. Par définition, on a donc

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor \leq \lfloor x \rfloor$$

Montrons maintenant que l'inégalité dans l'autre sens est vraie.

> Faisons un aparté « brouillon » pour comprendre comment on peut s'en sortir face à ce type d'exercice. On veut mq
>
> $$\lfloor x \rfloor \leq \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor$$
>
> Mais, comme $\lfloor x \rfloor$ est un entier, pour avoir l'inégalité ci-dessus, il est suffisant de mq
>
> $$\lfloor x \rfloor \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$$
>
> (en effet $\lfloor x \rfloor$ sera alors un entier plus petit qu'un réel, donc $\lfloor x \rfloor$ sera plus petit que la partie entière de ce réel). Ensuite, pour montrer cette nouvelle inégalité, on la réécrit
>
> $$\begin{aligned} & \lfloor x \rfloor \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \\ \Longleftrightarrow\ & n \lfloor x \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor \end{aligned}$$
>
> À nouveau, pour montrer cela, il suffit de mq
>
> $$n \lfloor x \rfloor \leq nx$$
>
> (en effet $n \lfloor x \rfloor$ sera alors un entier plus petit que le réel nx, donc $n \lfloor x \rfloor$ sera inférieur à la partie entière de nx). Cette dernière inégalité est-elle vraie ? Oui :
>
> $$\lfloor x \rfloor \leq x \implies n \lfloor x \rfloor \leq nx$$
>
> La partie « brouillon » est finie. Réécrivons tout au propre et dans l'ordre.

On a

$$\begin{aligned} & \lfloor x \rfloor \leq x \\ \Longrightarrow\ & n \lfloor x \rfloor \leq nx \\ \Longrightarrow\ & n \lfloor x \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor \qquad \text{car } n \lfloor x \rfloor \text{ est un entier} \\ \Longrightarrow\ & \lfloor x \rfloor \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \\ \Longrightarrow\ & \lfloor x \rfloor \leq \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor \qquad \text{car } \lfloor x \rfloor \text{ est un entier} \end{aligned}$$

Finalement, on a donc bien

$$\boxed{\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor}$$